TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

IV termin

Dr Nevena Radović

Predstavljanje signala Fourier-ovim redom

- U nastavku ćemo vidjeti kako je moguće predstaviti signal sumom njegovih komponenti. U ovom pogledu su signali veoma slični vektorima.

- Posmatrajmo signal $f(t)$ i aproksimirajmo ga najprije pomoću drugog signala $x(t)$ na intervalu $[t_1, t_2]$.

$$f(t) \cong Cx(t), \; za \; t \in [t_1, t_2]$$

- Gornja aproksimacija unosi sljedeću grešku:

$$e(t) = \begin{cases} f(t) - Cx(t), & za \; t \in [t_1, t_2] \\ 0, & drugdje \end{cases}$$

- Kada za aproksimaciju kažemo da je dobra?

Predstavljanje signala Fourier-ovim redom

- Najbolja aproksimacija je ona kojom se minimizuje greška $e(t)$.
- Kako je $e(t)$ takođe signal, njegovo mjerilo (tj. mjerilo njegove veličine ili jačine) može biti njegova energija, *Ee*. Drugim riječima, najbolja aproksimacija daje minimalnu energiju signala greške.
- Minimizacija *Ee* po C (koeficijent aproksimacije):

$$\frac{dE_e}{dC} = 0 \Rightarrow \quad \frac{d}{dC}\left[\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - Cx(t))^2\, dt\right] = 0$$

Predstavljanje signala Fourier-ovim redom

$$\underbrace{\frac{d}{dC}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt}_{=0\ (nema\ C)} - \frac{d}{dC}\left(2C\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt\right) + \frac{d}{dC}\left(C^2\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt\right) = 0$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt + 2C\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = 0 \quad /:2$$

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} = \frac{1}{\underbrace{E_x}_{\substack{energija\\ signala\ kojim\\ se\ predstavlja\\ f(t)}}} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt}_{\substack{skalarni\ proizvod\ signala\\ f(t)\ i\ signala\ kojim\ se\ on\\ predstavlja\ na\ [t_1,t_2]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ortogonalni signali

- Definicija 1: ***Skalarni proizvod*** ili unutrašnji proizvod signala *f*(*t*) i x(*t*):

$$(f,x) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt$$

- Uočimo da je energija signala skalarni proizvod signala samog sa sobom:

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = (x,x)$$

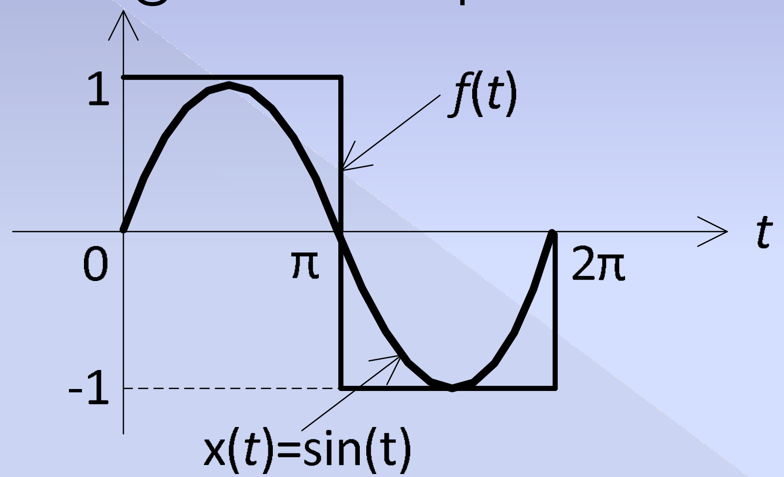
- Definicija 2: Signali se nazivaju ***ortogonalnim*** ako je njihov skalarni proizvod 0. Dakle, ako važi da je:

$$(f,x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt = 0$$

za signale *f*(*t*) i x(*t*) kažemo da su ortogonalni.

Primjer

- Naći komponentu signala *f*(*t*) oblika signala *x*=sin(*t*) sa minimalnom greškom aproksimacije.



$$f(t) \cong C\sin(t),\ za\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(2\pi - \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt}_{0}\right) = \pi$$

Primjer

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt$$

- Odnosno:

$$C = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(t)dt - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(t)dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\cos t\Big|_0^{\pi} + \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(2+2) = \frac{4}{\pi}$$

- Stoga, zaključujemo da je najbolja aproksimacija:

$$f(t) \cong C\sin(t) \qquad \Rightarrow f(t) \cong \frac{4}{\pi}\sin t$$

Ortogonalni signali

- Čemu je jednaka energija dva ortogonalna signala?
- Neka su $x(t)$, $y(t)$ ortogonalni signali, a $z(t)= x(t)+y(t)$, E_z=?

$$E_z = \int_t z^2(t)dt = \int_t (x(t)+y(t))^2 dt$$

$$E_z = \int_t x^2(t)dt + \int_t 2\underbrace{xy}_{0}dt + \int_t y^2(t)dt = E_x + E_y$$

Skup ortogonalnih signala

- Pretpostavimo da su $x_1(t)$, $x_2(t)$,...., $x_n(t)$ ortogonalni signali i da čine jedan skup:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t)x_n(t)dt = \left(x_m(t), x_n(t)\right) = \begin{cases} 0, m \neq n \\ E_n, m = n \end{cases}$$

- <u>Definicija</u>: Ako je energija signala $x_n(t)$, $E_n=1$, za svako n, skup je ***normalizovan*** i naziva se ***ortogonalnim***.
- <u>Napomena</u>: Bilo koji ortogonalni skup se može normalizovati dijeljenjem signala $x_n(t)$ sa $\sqrt{E_n}, \forall n$. Tada je njegova energija:

$$E_n^{'} = \int_t \left(\frac{x_n(t)}{\sqrt{E_n}}\right)^2 dt = \frac{1}{E_n}\int_t x_n^2(t)dt = \frac{E_n}{E_n} = 1$$

Trigonometrijski Fourier-ovi redovi

- Posmatrajmo skup signala:

$$\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, ..., \cos n\omega_0 t, ...; \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, ..., \sin n\omega_0 t, ...\}$$

- Definicija: Sinusoida na frekvenciji $\boldsymbol{n\omega_0}$ se naziva ***n-ti harmonik***, gdje je $\boldsymbol{\omega_0}$ ***fundamentalna frekvencija***, a *n* cio broj.
- Zapažanje: Pokazuje se da je na intervalu $[t_1, t_1+T_0]$, za proizvoljno t_1:

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T_0/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T_0/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0, \quad \forall n, m$$

Trigonometrijski Fourier-ovi redovi

- posmatrani skup signala ortogonalan:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \ldots =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t,$$

$\omega_0 = 2\pi / T_0$ na intervalu $t_1 \le t \le t_1 + T_0$

gdje su, po analogiji sa (1):

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2 n\omega_0 t dt}$$

Trigonometrijski Fourier-ovi redovi

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2 n\omega_0 t dt = E\{\cos n\omega_0 t\} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2}(1+\cos 2n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}t\Big|_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos 2n\omega_0 t dt}_{\substack{0 \text{ jer je } \cos 2n\omega_0 t \text{ periodična} \\ \text{na intervalu integraljenja}}} = \frac{T_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\cos n\omega_0 t dt, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\sin n\omega_0 t dt, \quad n = 1,2,\ldots$$

Kompaktni trigonometrijski Fourier-ov red

- Za identitet:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

- gdje su:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = arctg(-b_n / a_n) \qquad c_0 = a_0$$

- Moguće je zapisati:

$$\Rightarrow f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \qquad t_1 \le t \le t_1 + T_0$$

Primjer:

- Razviti u trigonometrijski Fourier-ov red na intervalu $t \in [0,\pi]$ funkciju: $f(t) = e^{-t/2}$

- Prisjetimo se najprije Ojlerovih formula:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \qquad \sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

- Fundamentalna frekvencija i perioda su:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2; \quad T_0 = \pi$$

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}dt = \frac{2}{\pi}(-2)e^{-t/2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}(e^{-t/2} - 1)$$

Primjer:

- Ostali koeficijenti su:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(e^{(-\frac{1}{2}+jn\omega_0)t} + e^{(-\frac{1}{2}-jn\omega_0)t})dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+jn\omega_0}e^{(-\frac{1}{2}+jn\omega_0)t}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{-\frac{1}{2}-jn\omega_0}e^{(-\frac{1}{2}-jn\omega_0)t}\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{-1+j4n}(e^{(-\frac{1}{2}+j2n)\pi} - 1) + \frac{2}{-1-j4n}(e^{(-\frac{1}{2}-j2n)\pi} - 1)\right) =$$

- Imajući u vidu da je:

$$e^{(-\frac{1}{2}+j2n)\pi} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\pm j2n\pi} = e^{-\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\cos 2n\pi}_{1} \pm j \underbrace{\sin 2n\pi}_{0}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

- jednačina za a_n se svodi na:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{-1+j4n}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1) + \frac{2}{-1-j4n}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)\right) = \frac{2}{\pi}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)\frac{-1-j4n+(-1+j4n)}{(-1+j4n)(-1-j4n)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)\frac{-2}{1+16n^2} = \underbrace{\frac{-4}{\pi}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)}_{a_0=c_0}\frac{1}{1+16n^2} = \frac{c_0}{1+16n^2}$$

- Analogno se dobija:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sin n\omega_0 t dt = \ldots = \frac{4nc_0}{1+16n^2}$$

- I na kraju:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{c_0^2}{(1+16n^2)^2} + \frac{16n^2 c_0^2}{(1+16n^2)^2}} = c_0\sqrt{\frac{1+16n^2}{(1+16n^2)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1+16n^2}}$$

Peridičnost trigonometrijskog Fourier-ovog reda

- Neka je:

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

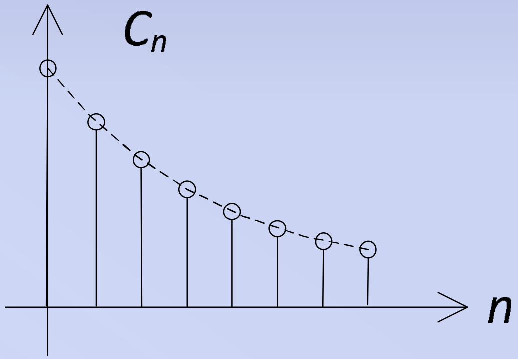
- Tada je:

$$\varphi(t + T_0) = \varphi(t)$$

- pošto su koeficijenti periodični sa periodom T_0.
- <u>Napomena:</u> Ako je $f(t)$ periodična funkcija, onda je njen Fourier-ov red predstavljen svuda, a ne samo na intervalu $t_1 \leq t \leq t_1 + T_0$.

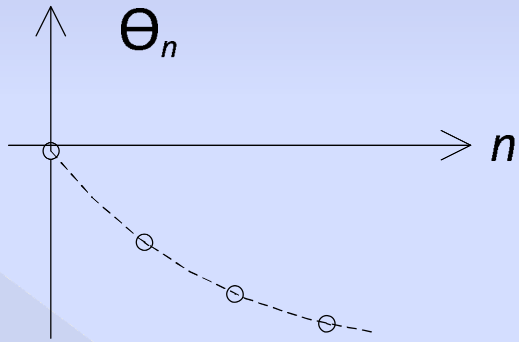
Fourier-ov spektar

- Periodični signal $f(t)$ može biti izražen kao suma sinusoida na frekvencijama 0, ω_0, $2\omega_0$,... sa amplitudama C_0, C_1, C_2, ... i fazama Θ_0, Θ_1, Θ_2,...
- Razlikujemo ***amplitudski*** i ***fazni*** spektar.



Amplitudski spektar

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$



Fazni spektar

$$\theta_n = arctg(-b_n / a_n)$$

- <u>Napomena</u>: Ukoliko je signal f(n) simetričan, integrali se mogu računati na polovini perioda, odnosno na $T_0/2$.

Eksponencijalni Fourier-ov red

- Krenimo od trigonometrijskog Fourier-ovog reda:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

- Imajmo u vidu da je:

$$c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{c_n}{2}(e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}) =$$

$$= (\frac{c_n}{2} e^{j\theta n}) e^{jn\omega_0 t} + (\frac{c_n}{2} e^{-j\theta n}) e^{-jn\omega_0 t}$$

- i:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad c_{-n} = \sqrt{a_n^2 + (-b_n)^2}$$

- tada možemo i uvesti oznake:

$$D_n = \frac{c_n}{2} e^{j\theta n} \qquad D_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{-j\theta n}$$

Eksponencijalni Fourier-ov red

- Uzimajući u obzir prethodne oznake, kao i činjenicu da je $c_0=D_0$, dobijamo definiciju eksponencijalnog Fourier-ovog reda:

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(D_n e^{jn\omega_0 t}+D_{-n}e^{-jn\omega_0 t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Napomena:

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jm\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* dt=\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases}0, & n\neq m\\ T_0, & n=m\end{cases}$$

- Dakle, skup eksponencijalnih funkcija $e^{jn\omega_0 t},\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ je ortogonalan na bilo kom intervalu trajanja T_0. Uočimo da je odgovarajući Fourier-ov par:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \underbrace{D_n}_{F(jn\omega_0)}=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Eksponencijalni Fourier-ov red

- Prednosti eksponencijalnog Fourier-ovog reda:
  - Kompaktna forma
  - Lakša za analizu signala (sistema)

$|D_n|$ je amplituda, a $\underline{D_n}$ faza koeficijenata eksponencijalnog reda.

- Napomena 1: Za realni signal $f(t)$, $|D_n|$ je parna funkcija po ω, a $\underline{D_n}$ neparna funkcija po ω.

- Napomena 2: Stvarna frekvencija je uvijek pozitivna! Ovdje se javlja i negativna frekvencija, ali samo formalno, zbog matematičkog aparata.

Odziv linearnog sistema na periodične signale

- Podsjećanje 1: Periodični signal smo Fourier-ovim redom izrazili sumom eksponencijalnih funkcija.
- Podsjećanje 2: Odziv linearnog sistema sa prenosnom funkcijom $H(s)$ na eksponencijalnu pobudu e^{st} je takođe eksponencijalna funkcija $H(s)e^{st}$.
- Imajući u vidu prethodno, zaključujemo da je odziv na pobudu $e^{j\omega t}$ jednak $H(j\omega)e^{j\omega t}$.
- Za pobudu zapisanu u obliku Fourier-ovog reda:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

odziv sistema sa prenosnom funkcijom $H(j\omega)$ je:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- Odziv je očigledno forme eksponencijalnog Fourier-ovog reda takođe, pa je odziv periodična funkcija sa istom periodom kao i pobuda $f(t)$.

Zaključci

- Periodični signal $f(t)$ ima mogućnost dvostranog posmatranja:
  - Vremenski domen $f(t)$
  - Frekvencijski domen $F(j\omega)$
- Korisno je poznavati signal u oba domena, jer se iz svakog od njih može zaključiti nešto jedinstveno.
- Ograničenja Fourier-ovog reda:
  - Koristi se samo za analizu periodičnih signala, a poznato je da su gotovo svi signali u praksi aperiodični;
  - Koristi se samo za asimptotski stabilne signale.
- Prevazilaženje ograničenja:
  - Uvođenje Fourier-ove transformacije umjesto reda
  - Generalizacija Laplace-ovom transformacijom.

Podsjećanja na bitne matematičke identitete

$$\cos 2n\pi = 1 \qquad \sin 2n\pi = 0$$

$$\cos n\pi = (-1)^n \qquad \sin n\pi = 0$$

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{n/2}, n \text{ parno} \\ 0, \qquad n \text{ neparno} \end{cases} \qquad \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}, n \text{ neparno} \\ 0, \qquad n \text{ parno} \end{cases}$$

$$e^{j2n\pi} = 1 \qquad e^{jn\pi} = -1 \qquad e^{jn\pi/2} = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \text{ parno} \\ j(-1)^{(n-1)/2}, & n \text{ neparno} \end{cases}$$

$$\int \cos x dx = \sin x \qquad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin x \qquad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos x$$